Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $\sigma \in \Omega$, η *определяется равенством* (1). *Тогда, если* $\sigma_0 \in \Omega$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r \to +0} \sigma(r)/\sigma_0(r) = 0,$$

то вложение $C^p_\eta(X) \subset C^q_{\sigma_0}(X)$ *компактно.*

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty$. *Тогда, если* $\eta \in \Omega$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r \to +0} \eta(r) r^{\gamma(1/q-1/p)} = 0,$$

то вложение $C^p_\eta(X) \subset L^q(X)$ *компактно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванишко И. А. *Оценки максимальных функций Кальдерона – Коляды на пространствах однородного типа* // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12. – № 1. – С. 64–67.

2. Kolyada V. I. *Estimates of maximal functions measuring local smoothness* // Analysis Math. – 1999. – V. 35. – No 1. – P. 277–300.

В. И. Иванов, Liu Yongping

Тула, Beijing, ivaleryi@mail.ru, ypliu@bnu.edu.cn

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ КОНСТАНТ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p, $1 \leqslant p < 2$, С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЕСОМ ЯКОБИ

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ — одномерный тор, $\alpha \geqslant -1/2$, $d\nu_\alpha(x) = |\sin x|^{2\alpha+1} dx$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $L_{p,\alpha}(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических измеримых по Лебегу функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\nu_\alpha(x) \right)^{1/p} < \infty,$$

$P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)$ — ортогональные многочлены Якоби на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^\alpha$, для которых $P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)=1$, $t_{n,\alpha}$ — наибольший нуль $P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)$, $\tau_{n,\alpha}=\arccos t_{n,\alpha}$.

Тригонометрические полиномы

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_{2n}(x)=P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos x),$$
$$\varphi_{2n-1}(x)=P_{n-1}^{(\alpha+1,\alpha+1)}(\cos x)\sin x,\quad n=1,2,\dots,$$

образуют в пространстве $L_{p,\alpha}(\mathbb{T})$ полную систему, ортогональную относительно скалярного произведения

$$(f,g)_\alpha=\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g}(x)d\nu_\alpha(x).$$

Пусть $E_n(f)_{p,\alpha}$ — наилучшее приближение функции $f\in$ $\in L_{p,\alpha}(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

В [1] показано, что в пространстве $L_{p,\alpha}(\mathbb{T})$ действует оператор обобщенного сдвига

$$T^t f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^\pi\{f(\psi)(1+B)+f(-\psi)(1-B)\}(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta,$$

где

$$\psi=\arccos(\cos x\cos t+\sin x\sin t\cos\theta),$$
$$B=\frac{\sin x\cos t-\cos x\sin t\cos\theta}{\sin\psi},$$

и определен модуль непрерывности

$$\omega(\delta,f)_{p,\alpha}=\sup\{\Omega(t,f)_{p,\alpha}:|t|\leqslant\delta\},\quad 0<\delta\leqslant\pi,$$

где

$$\Omega^p(t,f)_{p,\alpha}=\int_{\mathbb{T}}(T_y^t|f(y)-f(x)|^p)\,|_{y=x}\,d\nu_\alpha(x)=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}\int_{\mathbb{T}}\int_0^\pi\{|f(\psi)-f(x)|^p(1+B)+$$
$$+|f(-\psi)-f(x)|^p(1-B)\}(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta\,d\nu_\alpha(x).$$

Константы Джексона определим равенством

$$D(n,\delta)_{p,\alpha}=\sup_{f\in L_{p,\alpha}(\mathbb{T})}\frac{E_n(f)_{p,\alpha}}{\omega(\delta,f)_{p,\alpha}}.$$

В случае единичного веса ($\alpha=-1/2$) известно, что

$$D(n,\delta)_{2,-1/2}=2^{-1/2},\quad \pi/n\leqslant\delta\leqslant\pi, \tag{1}$$

$$D(2n-1,\delta)_{p,-1/2}=2^{1/p-1},\quad 1\leqslant p<2,\quad \pi/n\leqslant\delta\leqslant\pi. \tag{2}$$

Равенство (1) доказано Н. И. Черных [2]. Оценка сверху в (2) также доказана Н. И. Черных [3], оценка снизу — В. И. Бердышевым [4].

В [1] установлено, что для $\alpha>-1/2$

$$D(n,\delta)_{2,\alpha}=2^{-1/2},\quad 2\tau_{n,\alpha}\leqslant\delta\leqslant\pi, \tag{3}$$

$$D(2n-1,\delta)_{p,\alpha}\leqslant 2^{1/p-1},\quad 1\leqslant p<2,\quad 2\tau_{n,\alpha}\leqslant\delta\leqslant\pi. \tag{4}$$

Для четных функций равенство (3) было доказано А. Г. Бабенко [5].

Ранее оценка вида (4) для пространства с весом была получена А. В. Московским [6] для пространства $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ со степенным весом $x^{2\alpha+1}$, $\alpha>-1/2$. Однако вопрос о ее точности оставался открытым.

Мы доказываем следующее утверждение.

Теорема. *Если* $n\in\mathbb{N}$, $\alpha>-1/2$, $1\leqslant p<2$, *то*

$$D(n,\pi)_{p,\alpha}\geqslant 2^{1/p-1}. \tag{5}$$

Таким образом, оценка (4), как и в случае единичного веса, является точной. При доказательстве оценки (5) используются теорема Биркгофа о представлении дважды стохастической матрицы в виде выпуклой линейной комбинации крайних матриц, у которых в каждой строке и каждом столбце одна единица, а остальные элементы нули, и экспоненциальные оценки вероятностей сумм независимых случайных величин, определяемых крайними матрицами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чертова Д. В. *Теоремы Джексона в пространствах* L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ *с периодическим весом Якоби* // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. – 2009. – Вып. 1. – С. 5–27.

2. Черных Н. И. *О неравенстве Джексона в* L_2 // Труды МИАН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 71–74.

3. Черных Н. И. *Неравенство Джексона в* $L_p(0, 2\pi)$ *с точной константой* // Труды МИРАН. – 1992. – Т. 198. – С. 232–241.

4. Бердышев В. И. *О теореме Джексона в* L_p // Труды МИАН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 13–16.

5. Бабенко А. Г. *Точное неравенство Джексона – Стечкина для* L^2*-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 68. – № 6. – С. 27–52.

6. Московский А. В. *Теоремы Джексона в пространствах* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *и* $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ. – 1998. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 44–70.